

DS2 VERSION B CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

BARÈME (OFFICIEL DU CONCEPTEUR).

Partie I

1. a. 1 point.
b. 2 points.
2. a. (i) 1.5 point.
(ii) 1.5 point.
b. (i) 2 points.
(ii) 1 point.
(iii) 1 point.
c. 1.5 point.
3. 2 points.
4. a. 1.5 point.
b. 2 points.
c. 1 point.
5. a. 1 point.
b. 2 points.
c. 2 points.
6. a. 2.5 points.
b. 2 points.
c. 1.5 point.
d. (i) 2 points.
(ii) 2 points.
(iii) 1.5 point.
(iv) 2 points.
e. 1.5 point.

Total Partie I : 38 points.

Partie II

7. 2 points.
8. a. 2.5 points.
b. 2 points.
c. 2 points.

- d. (i) 2 points.
(ii) 1.5 point.
(iii) 1.5 point.
 - e. 2 points.
f. 1.5 point.
9. a. 2 points.
b. 2 points.
c. 1.5 point.
d. (i) 1 point.
(ii) 2 points.
e. 2 points.
f. 2 points.
g. 2 points.
h. 1 point.

Total Partie II : 32.5 points.

Partie III

10. a. 1 point.
b. 1.5 point.
11. 1.5 point.
12. a. 1.5 point.
b. 1.5 point.
c. 1.5 point.
13. a. 1 point.
b. 1.5 point.
c. 2 points.
d. (i) 1.5 point.
(ii) 1.5 point.
e. 1.5 point.
f. 1.5 point.
g. 1.5 point.
14. a. (i) 1.5 point.
(ii) 1.5 point.
b. 2 points.
c. 1.5 point.
d. 1.5 point.
e. 2 points.

Total Partie III : 30.5 points.

Total : 101 points.

ERREURS FRÉQUENTES / COMMENTAIRES.

CORRECTION DÉTAILLÉE.

Partie 1 - Propriétés des variables aléatoires simples.

1. On considère une variable aléatoire simple X .

- a. Comme $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble fini, alors $X^k(\Omega) = \{x_1^k, \dots, x_n^k\}$ est encore un ensemble fini, ainsi X^k admet une espérance. De plus, le théorème de transfert permet d'affirmer que

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k P(X = x_i).$$

- b. Soient X, Y deux variables aléatoires simples, supposées indépendantes. Notant $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$, on a, par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P([X = x_i] P([Y = y_j])) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P([X = x_i] \sum_{j=1}^m y_j P([Y = y_j])) = \sum_{i=1}^n x_i P([X = x_i] E(Y)) \\ &= E(Y) \sum_{i=1}^n x_i P([X = x_i]) \\ &= E(X)E(Y), \end{aligned}$$

ce qui est la formule attendue.

2. On note maintenant $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$ et, pour $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, $p_i = P(X = x_i)$.

a.

- (i) Par le théorème de transfert,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^{\ell} e^{tx_i} p_i$$

- (ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, on a bien $e^{tx_i} > 0$ et $p_i > 0$. Par produit, puis par somme (finie), on a alors $M_X(t) > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b. (i) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

- initialisation. Pour $n = 0$, par définition

$$M_X^{(0)}(t) = M_X(t) = E(e^{tX}) = E(X^0 e^{tX}),$$

et la formule est vraie.

- héritéité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $M_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})$ (HR). Alors,

$$\begin{aligned}
 M_X^{(k+1)}(t) &= \left(M_X^{(k)} \right)'(t) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i^k e^{tx_i} p_i \right)' \quad (\text{par HR et théorème de transfert}) \\
 &= \sum_{i=1}^{\ell} x_i^{k+1} e^{tx_i} p_i \\
 &= E(X^{k+1} e^{tX}) \quad (\text{par théorème de transfert})
 \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

- (ii) D'après la question précédente

$$\begin{aligned}
 M_X^{(k)}(0) &= \sum_{i=1}^{\ell} x_i^k p_i e^0 = \sum_{i=1}^{\ell} x_i^k p_i \\
 &= E(X^k) \quad (\text{toujours par théorème de transfert})
 \end{aligned}$$

- (iii) Par la formule de König-Huyguens et la question précédente,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = M_X''(0) - M_X'(0)^2.$$

- c. Par ce qui précède (même si on n'a jamais justifié que M_X était de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} , il apparaît clair qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ comme combinaison linéaire d'exponentielles, elle est en particulier de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}), on a

$$M_X''(t) = E(X^2 e^{tX}) = \sum_{i=1}^{\ell} x_i^2 e^{tx_i} p_i$$

Avec le même argument que précédemment (somme de termes strictement positifs) la somme ci-dessus est strictement positive (et ce, pour tout $t \in \mathbb{R}$). Donc M_X est convexe sur \mathbb{R} .

3. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$, où les X_i sont (mutuellement) indépendantes.

$$M_{S_n}(t) = E(e^{tS_n}) = E\left(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}\right)$$

Par le lemme des coalitions, les variables $e^{tX_1}, e^{tX_2}, \dots, e^{tX_n}$ sont aussi mutuellement indépendantes. Il faut alors commencer par étendre le résultat de la question (1b) par récurrence. Montrons que, si Y_1, \dots, Y_n mutuellement indépendantes (et simples) alors

$$E(Y_1 Y_2 \dots Y_n) = E(Y_1) E(Y_2) \dots E(Y_n)$$

Il n'y a pas besoin d'initialiser cette récurrence. Supposons que le résultat soit vrai pour un certain n . On considère alors Y_1, \dots, Y_{n+1} mutuellement indépendantes. Observons que $Y_1 Y_2 \dots Y_n$ est encore une variable aléatoire simple (elle prend un nombre fini de valeurs) qui est, par le lemme des coalitions, indépendante de Y_{n+1} . Alors, par (1b), on a

$$E(Y_1 Y_2 \dots Y_{n+1}) = E(Y_1 Y_2 \dots Y_n) E(Y_{n+1})$$

Mais on peut maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence pour écrire

$$E(Y_1 Y_2 \dots Y_{n+1}) = E(Y_1) E(Y_2) \dots E(Y_n) E(Y_{n+1})$$

et la récurrence est terminée. En appliquant le résultat avec $Y_i = e^{tX_i}$, on a la formule demandée

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t).$$

4. On suppose ici que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, où $p \in]0; 1[$.

- a. Comme $X(\Omega) = \{0; 1\}$, on a

$$M_X(t) = \sum_{i=0}^1 e^{ti} P(X = i) = (1-p) + pe^t.$$

- b. On dérive. $M'_X(0) = pe^0 = p = E(X)$. On a aussi $M''_X(0) = p$.

- c. On retrouve bien

$$V(X) = p(1-p) = p - p^2 = M''_X(0) - M'_X(0)^2.$$

5. Soit Y une v.a simple avec $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_\ell\}$, $p_i = P(Y = y_i) > 0$ vérifiant $E(Y) < 0$ et $P(Y > 0) > 0$.

- a. D'après ce qui précède, $M'_Y(0) = E(Y) < 0$ par hypothèse. Il n'y a donc rien à faire de plus.

- b. On sait que $M_Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i e^{ty_i}$.

Il y a dans cette somme des indices pour lesquels $y_i \leq 0$ mais aussi des indices (et au moins un, sinon $P(Y > 0)$ ne serait pas strictement positive) pour lesquels $y_i > 0$. En prenant le plus grand, c'est à dire

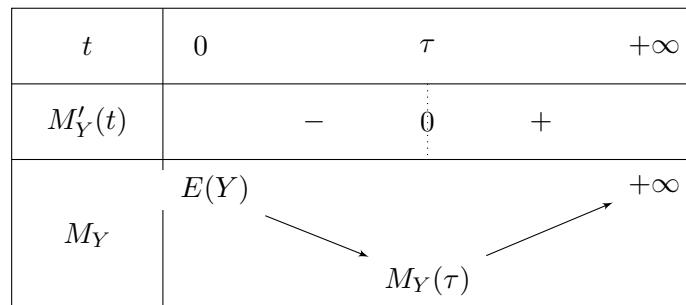
$$\gamma = \max\{y_i \in Y(\Omega) : y_i > 0\}$$

et en notant m tel que $y_m = \gamma$, on a, par factorisation

$$M_Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i e^{ty_i} \sim y_m e^{y_m t} \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

- c. Cette question vise à montrer que la fonction M_Y admet un minimum sur $]0; +\infty[$ et est un peu subtile.

On peut raisonner avec les informations à dispositions : $M''_Y(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc M'_Y est strictement croissante. Si, pour tout $t > 0$, on avait $M'_Y(t) \leq 0$, alors M_Y serait décroissante sur $]0; +\infty[$, ce qui est incompatible avec la limite infinie montrée à la question précédente. Donc il existe $t_1 > 0$ tel que $M'_Y(t_1) > 0$. Par stricte croissance de M'_Y , on a donc $M'_Y(t) > 0$ pour tout $t \geq t_1$. En appliquant le théorème de bijection à M'_Y , celle-ci réalise une bijection de $]0, \infty[$ sur un ensemble J qui contient $]M'_Y(0); M'_Y(t_1)[$ qui lui-même contient 0 qui admet donc un unique antécédent $\tau > 0$ par M'_Y qui est bien la valeur où le minimum de M_Y est atteint :



6. Soit $a < 0 < b$ et X une variable simple d'espérance nulle telle que $P(< \leq X \leq b) = 1$.

- a. C'est une inégalité de convexité. On sait que, pour toute fonction convexe f sur $[a, b]$ pour tous λ, μ tels que $\lambda + \mu = 1$, on a

$$f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b).$$

Soit $t > 0$ fixé. On va donc appliquer ceci avec $f : x \mapsto e^{tx}$ (qui est clairement convexe car sa dérivée seconde égale à $t^2 e^{tx}$ strictement positive), $\lambda = \frac{b-u}{b-a}$ et $\mu = \frac{u-a}{b-a}$.
(On a bien

$$\lambda + \mu = \frac{b-u}{b-a} + \frac{u-a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.)$$

On obtient donc, en observant que

$$\lambda a + \mu b = \frac{b-u}{b-a}a + \frac{u-a}{b-a}b = \frac{ba - ua + ub - ab}{b-a} = u$$

$$\begin{aligned} e^{tu} &= \exp(t(\lambda a + \mu b)) \\ &\leq \lambda e^{ta} + \mu e^{tb} \\ &= \frac{b-u}{b-a}e^{ta} + \frac{u-a}{b-a}e^{tb}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

- b. On applique cette inégalité avec $u = x_i$ qui est bien un élément (pour tout $i \in \llbracket 1; \ell \rrbracket$) de $[a, b]$ par hypothèse. Ceci donne

$$e^{tx_i} \leq \frac{b-x_i}{b-a}e^{ta} + \frac{x_i-a}{b-a}e^{tb}.$$

En injectant cette inégalité dans la formule obtenue en (2a)-(i), et du fait que

$$\sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{\ell} p_i x_i = E(X) = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{i=1}^{\ell} p_i t^{x_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell} p_i \left(\frac{b-x_i}{b-a}e^{ta} + \frac{x_i-a}{b-a}e^{tb} \right) \\ &= e^{ta} \left(\frac{b}{b-a} - \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{\ell} x_i p_i \right) + e^{tb} \left(\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{\ell} x_i p_i - \frac{a}{b-a} \right) \\ &= \frac{b}{b-a}e^{ta} - \frac{a}{b-a}e^{tb}. \end{aligned}$$

On pose $b = \frac{-a}{b-a}$ et on introduit la fonction

$$\psi : s \mapsto \ln(1 - p + pe^s) - ps$$

- c. C'est une simple vérification néanmoins un peu lourde du fait des notation. Observant que $p(b-a) = -a$,

$$\begin{aligned}
\exp(\psi(t(b-a))) &= \frac{1-p+pe^{t(b-a)}}{e^{pt(b-a)}} \\
&= e^{at} \left(1-p+pe^{t(b-a)}\right) = e^{at} + \frac{a}{b-a}e^{at} - \frac{a}{b-a}e^{bt} \\
&= \frac{b}{b-a}e^{at} - \frac{a}{b-a}e^{at} \\
&\geq M_X(t) \quad (\text{par la question précédente})
\end{aligned}$$

d.

(i) On vérifie

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= \ln(1-p+p) = 0, \\
\psi'(s) &= \frac{pe^s}{1-p+pe^s} - p, \quad \psi'(0) = \frac{p}{1-p+p} - p = 0.
\end{aligned}$$

(ii) Soient $u, v > 0$. On a

$$4uv - (u+v)^2 = 4uv - u^2 - 2uv - v^2 = -u^2 + 2uv - v^2 = -(u-v)^2 \leq 0$$

ce qui donne bien l'inégalité souhaitée.

(iii) On commence par calculer la dérivée seconde :

$$\psi''(s) = \frac{pe^s(1-p+pe^s) - pc^spe - s}{(1-p+pe^s)^2} = \frac{pe^s(1-p)}{((1-p)+pe^s)^2}$$

On va alors appliquer l'inégalité de la question précédente avec $u = 1-p > 0$ et $v = pe^s > 0$.
 Comme l'inégalité se réécrit

$$\frac{uv}{(u+v)^2} \leq \frac{1}{4},$$

on a bien $\psi''(s) \leq 1/4$ comme demandé.(iv) Posons la fonction $h : s \mapsto \psi(s) - \frac{1}{8}s^2$. On a

$$h'(s) = \psi'(s) - \frac{1}{4}s, \quad h''(s) = \psi''(s) - \frac{1}{4} \leq 0.$$

Ainsi, on a les tableaux *en cascade*

s	0	$+\infty$
$h''(s)$	—	
h'	0	
$h'(s)$	0	—
h	0	
$h(s)$	0	—

En particulier, $h(s) \leq 0$ pour tout $s > 0$, ou encore $\psi(s) \leq \frac{1}{8}s^2$.

e. En combinant les Question (6c) et (6d) – (iv), on a, par croissance de l'exponentielle,

$$M_X(t) \leq \exp(\psi(t(b-a))) \leq \exp\left(\frac{1}{8}t^2(b-a)^2\right).$$

Partie 2 - Quelques inégalités.

7. On va utiliser l'inégalité de Jensen, avec la fonction \ln qui est concave. Notant comme précédemment $X(\Omega) = \{x_i : i \in \llbracket A, \ell \rrbracket\}$ et $p_i = P(X = x_i)$ (ce qui donne bien $p_1 + p_2 + \dots + p_\ell = 1$), on a

$$\begin{aligned} \ln(E(X)) &= \ln\left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i p_i\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\ell} p_i \ln(x_i) \quad (\text{par l'inégalité de concavité}) \\ &= E(\ln(X)) \quad (\text{par le théorème de transfert}), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

8. Soient $p, q \geq 1$ deux réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a. Soient a, b deux réels strictement positifs (si a ou b est nul, l'inégalité est triviale). On a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) &\geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \quad (\text{par concavité de } \ln) \\ &= \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab). \end{aligned}$$

En composant par l'exponentielle, croissante, on a bien

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab.$$

b. Soit $\omega \in \Omega$. D'après ce qui précède, comme X, Y sont à valeurs positives, $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont des nombres positives et on a

$$\frac{1}{p}X(\omega)^p + \frac{1}{q}Y(\omega)^q \geq X(\omega)Y(\omega).$$

Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$, par positivité de l'espérance, puis par linéarité de celle-ci, on a

$$\frac{1}{p}E(X^p) + \frac{1}{q}E(Y^q) = E\left(\frac{1}{p}X^p + \frac{1}{q}Y^q\right) \geq E(XY),$$

ce qui est l'inégalité demandée.

c. Soit $\lambda > 0$. On applique l'inégalité précédente, en remplaçant X par λX également à valeurs positives. On a

$$\lambda E(XY) = E(\lambda XY) \leq \frac{1}{p}E((\lambda X)^p) + \frac{1}{q}E(Y^q) = \frac{\lambda^p}{p}E(X) + \frac{1}{q}E(Y^q)$$

puis en divisant par $\lambda > 0$, on obtient bien

$$E(XY) \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}E(X^p) + \frac{\lambda^{-1}}{q}E(Y^q).$$

Ouf ! Un peu astucieux...

- d. Soient α, β deux réels strictement positifs. On définit la fonction φ sur \mathbb{R}_+^* en posant

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{p}\lambda^{p-1}\alpha + \frac{1}{q}\lambda^{-1}\beta.$$

- (i) On commence par dériver

$$\varphi'(\lambda) = \frac{p-1}{p}\lambda^{p-2}\alpha - \frac{1}{q}\lambda^{-2}\beta = \frac{1}{q\lambda^2}(\alpha\lambda^p - \beta).$$

Notons $\lambda_0 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/p}$. On peut dresser le tableau de variations :

λ	0	λ_0	$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$		-	+
φ	$+\infty$	$\varphi(\lambda_0)$	$+\infty$

Diagramme des variations de φ :

```

graph TD
    A[+] --> B[0]
    B -- "-" --> C[0]
    C -- "+" --> D[+]
    D --> E[+]
    E --> F[+]
    style B fill:none,stroke:none
    style C fill:none,stroke:none
    style D fill:none,stroke:none
    style E fill:none,stroke:none
    style F fill:none,stroke:none
  
```

- (ii) Le minimum de φ est donc atteint en λ_0 défini ci-dessus.

- (iii) La valeur minimale de φ est donc

$$\varphi(\lambda_0) = \frac{1}{p}\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{(p-1)/p} + \frac{1}{q}\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1/p}.$$

Observons que

$$\frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_0) &= \frac{1}{p}\alpha^{1-1/q}\beta^{1/q} + \frac{1}{q}\alpha^{1/p}\beta^{-1/p+1} \\ &= \left(\alpha^{1/p}\beta^{1/q}\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \\ &= \alpha^{1/p}\beta^{1/q}. \end{aligned}$$

- e. L'inégalité obtenue en (8c) étant vraie pour tout $\lambda > 0$, on choisit la valeur de λ qui rend le terme de droite minimal, c'est à dire $\lambda = \lambda_0$ d'après les deux questions précédentes. Avec $\alpha = E(X^p)$ et $\beta = E(Y^q)$ (comme X et Y sont simples et à valeurs strictement positives, les espérances précédentes sont des réels strictement positifs). Il suit que

$$E(XY) \leq \varphi(\lambda_0) = E(X^p)^{1/p}E(Y^q)^{1/q},$$

ce qui est bien l'inégalité de Hölder et répond à la question.

- f. Dans le cas $p = q = 2$, cette inégalité s'écrit comme

$$E(XY) \leq E(X^2)^{1/2}E(Y^2)^{1/2} = \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

elle porte aussi le nom (dans ce cas particulier) d'inégalité de Cauchy-Schwarz.

9. On considère une v.a simple X d'espérance nulle, on note $\sigma^2 = E(X^2) > 0$, $\xi^4 = E(X^4) > 0$. On introduit les deux v.a

$$X^+ = \max(X, 0), \quad X^- = \max(-X, 0)$$

et on pose $\delta = P(X \geq 0)$.

- a. On procède par disjonction de cas. Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $X(\omega) \geq 0$, alors $X^+(\omega) = X(\Omega)$ et comme $-X(\omega) \leq 0$, $X^-(\omega) = 0$ on a dans ce cas $X^+(\omega) - X^-(\omega) = X(\omega)$.
- Si $X(\omega) < 0$, alors $X^+(\omega) = 0$ et comme $-X(\omega) > 0$, $X^-(\omega) = -X(\omega)$ on a dans ce cas $X^+(\omega) - X^-(\omega) = X(\omega)$.

Dans les deux cas la formule est vraie. On a bien

$$X = X^+ - X^-.$$

Par linéarité de l'espérance, on a $E(X^+) - E(X^-) = E(X) = 0$ ou encore $E(X^+) = E(X^-)$.

- b. On raisonne de la même manière. Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $X(\omega) \geq 0$, alors $X^+(\omega) = X(\Omega)$ et comme $-X(\omega) \leq 0$, $X^-(\omega) = 0$ on a dans ce cas $X^+(\omega)^2 + X^-(\omega)^2 = X(\omega)^2$.
- Si $X(\omega) < 0$, alors $X^+(\omega) = 0$ et comme $-X(\omega) > 0$, $X^-(\omega)^2 = (-X(\omega))^2$ on a dans ce cas $X^+(\omega)^2 + X^-(\omega)^2 = X(\omega)^2$.

Dans les deux cas la formule est vraie. On a bien

$$X^2 = (X^+)^2 + (X^-)^2.$$

Toujours par linéarité de l'espérance, on obtient $\sigma^2 = E(X^2) = E((X^+)^2) + E((X^-)^2)$.

- c. Comme on peut écrire

$$X^+ = X + X^-$$

et que X^- est à valeurs positives, on a $X^+ \leq X$ ce qui donne $(X^+)^4 \leq X^4$ et par croissance de l'espérance $E((X^+)^4) \leq E(X^4) = \xi^4$. De la même manière, on obtient $E((X^-)^4) \leq E(X^4) = \xi^4$.

- d. On introduit la v.a W définie par $W(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } X(\omega) \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

- (i) Soit $\omega \in \Omega$.

Si $X(\omega) \geq 0$, alors $W(\omega) = 1$ et $X^+(\omega) = X(\omega)$ donc $W(\omega)X(\omega) = X(\omega) = X^+(\omega)$.

Si $X(\omega) < 0$, alors $W(\omega) = 0$ et $X^+(\omega) = 0$ donc $W(\omega)X(\omega) = 0 = X^+(\omega)$.

Dans les deux cas, on a bien l'égalité demandée, donc $WX = X^+$.

- (ii) De la question précédente, on déduit

$$\begin{aligned} E((X^+)^2) &= E(W^2 X^2) \\ &\leq \sqrt{E(W^4) E(X^4)} \quad (\text{par Hölder avec } p = q = 1/2) \\ &= \sqrt{\delta \xi^4} = \sqrt{\delta} \xi^2 \end{aligned}$$

car $W^4 = W$ est une loi de Bernoulli de paramètre (et donc d'espérance) $P(W = 1) = P(X \geq 0) = \delta$.

- e. Malgré l'indication, il faut penser à *bien choisir* les v.a auxquelles on applique l'inégalité de Hölder, plus précisément, il faut découper

$$(X^-)^2 = (X^-)^{2/3} (X^-)^{4/3}$$

Par Hölder, on a alors

$$\begin{aligned} E((X^-)^2) &= E\left((X^-)^{2/3}(X^-)^{4/3}\right) \\ &\leq E\left(\left((X^-)^{2/3}\right)^{3/2}\right)^{2/3} E\left(\left((X^-)^{4/3}\right)^3\right)^{1/3} \\ &= E(X^-)^{2/3} E((X^-)^4)^{1/3}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

f. Toujours avec Hölder

$$\begin{aligned} E(X^-) &= E(X^+) = E(XW) \\ &\leq E(X^4)^{1/4} E(W^{4/3})^{3/4} \\ &= \xi \delta^{3/4}, \end{aligned}$$

ce qu'on nous demandait.

g. D'après la question précédente, on a également

$$E(X^-)^{2/3} \leq \left(\xi \delta^{3/4}\right)^{2/3} = \xi^{2/3} \sqrt{\delta}.$$

D'après la question (9c), on a $E((X^-)^4) \leq \xi^4$ donc $E((X^-)^4)^{1/3} \leq \xi^{4/3}$. En combinant ces deux inégalités et la question (9e), on obtient

$$E((X^-)^2) \leq E(X^-)^{2/3} E((X^-)^4)^{1/3} \leq \xi^{2/3} \sqrt{\delta} \xi^{4/3} = \sqrt{\delta} \xi^2.$$

Comme on a également, d'après (9d) – (ii) que $E((X^+)^2) \leq \sqrt{\delta} \xi^2$, on peut conclure, grâce à la question (9b) que

$$\sigma^2 = E((X^+)^2) + E((X^-)^2) \leq \sqrt{\delta} \xi^2 + \sqrt{\delta} \xi^2 = 2\sqrt{\delta} \xi^2,$$

ce qui est bien le résultat voulu. Ouf !

h. En élevant l'inégalité précédente au carré, on obtient

$$\sigma^4 \leq 4\delta \xi^4,$$

ou encore

$$P(X \geq 0) = \delta \geq \frac{\sigma^4}{4\xi^4},$$

ce qui fait quand même bien plaisir.

Partie 3 - Grandes déviations. On considère une v.a simple Y d'espérance nulle, telle que $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_\ell\}$ avec $\{y_1, \dots, y_k\} \subset \mathbb{R}_+$ (et $\{y_{k+1}, \dots, y_\ell\} \subset \mathbb{R}_-^*$), on note $p_i = P(Y = y_i) > 0$. On note τ la valeur strictement positive où M_Y atteint son minimum et

$$\rho = M(\tau).$$

Ainsi, pour tout $t > 0$, $M_Y(t) \geq \rho$.

10.

a. Il est clair, comme $\tau > 0$, que

$$\begin{aligned} [Y \geq 0] &\iff [\tau Y \geq 0] \\ &\iff [e^{\tau Y} \geq 1] \end{aligned}$$

et donc

$$P(Y \geq 0) = P(e^{\tau Y} \geq 1).$$

b. La v.a $e^{\tau Y}$ est positive et admet une espérance. Par l'inégalité de Markov, on a

$$P(Y \geq 0) = P(e^{\tau Y} \geq 1) \leq \frac{E(e^{\tau Y})}{1} = M_Y(\tau) = \rho.$$

11. Par le théorème de transfert

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{e^{\tau y_i}}{\rho} P(Y = y_i) = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{\ell} e^{\tau y_i} P(Y = y_i) = \frac{1}{\rho} E(e^{\tau Y}) = \frac{1}{\rho} M_Y(\tau) = 1.$$

On considère une v.a Z telle que $Z(\Omega) = \{y_1, \dots, y_\ell\}$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket, \quad P(Z = y_i) = \frac{e^{\tau y_i}}{\rho} P(Y = y_i).$$

(Du fait de la question précédente, la formule ci-dessus définit bien une v.a.)

12.

a. Par la question (2a),

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \sum_{i=1}^{\ell} P(Z = y_i) e^{ty_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} e^{ty_i} \frac{e^{\tau y_i}}{\rho} P(Y = y_i) \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{\ell} e^{(t+\tau)y_i} P(Y = y_i) \\ &= \rho^{-1} M_Y(t + \tau). \end{aligned}$$

b. Par la question (2b) – (ii), $E(Z) = M'_Z(0)$. Or, d'après la formule ci-dessus

$$M'_Z(t) = \rho^{-1} M'_Y(t + \tau).$$

Mais alors

$$E(Z) = M'_Z(0) = \rho^{-1} M'_Y(\tau) = 0$$

car τ est le minimum de M_Y et donc la dérivée s'y annule, comme on l'a vu auparavant.

c. Toujours d'après la Question (2b) – (ii), on sait que

$$E(Z^2) = M''_Z(0) = \rho^{-1} M''_Y(0\tau) > 0,$$

d'après (2a) – (ii).

13.

a. On commence par observer que

$$P(Y = y_i) = \rho P(Z = y_i) e^{-\tau y_i}.$$

Ensuite, on somme les probabilités des valeurs positives :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 0) &= \sum_{i=1}^k P(Y = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \rho P(Z = y_i) e^{-\tau y_i} \\ &= \rho \sum_{i=1}^k P(Z = y_i) e^{-\tau y_i} \end{aligned}$$

On pose $\delta = P(Z \geq 0)$.

b. Les v.a Y et Z prennent les mêmes valeurs donc

$$Y(\Omega) \cap \mathbb{R}_+ = Z(\Omega) \cap \mathbb{R}_+ = \{y_1, \dots, y_k\},$$

il suit donc que

$$\sum_{i=1}^k \delta^{-1} P(Z = y_i) = \frac{\sum_{i=1}^k P(Z = y_i)}{P(Z \geq 0)} = \frac{P(Z \geq 0)}{P(Z \geq 0)} = 1.$$

c. La somme précédente étant égale à 1, on peut utiliser l'inégalité de concavité.

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{i=1}^k \delta^{-1} P(Z = y_i) e^{-\tau y_i} \right) &\geq \sum_{i=1}^k \delta^{-1} P(Z = y_i) \ln(e^{-\tau y_i}) \\ &= -\tau \delta^{-1} \sum_{i=1}^k P(Z = y_i) y_i \end{aligned}$$

d.

(i) Par théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(|Z|) &= \sum_{i=1}^{\ell} |y_i| P(Z = y_i) \\ &= \sum_{i=1}^k y_i P(Z = y_i) + \sum_{i=k+1}^{\ell} (-y_i) P(Z = y_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^k y_i P(Z = y_i) \end{aligned}$$

car, pour tout $i \in \llbracket k+1, \ell \rrbracket$, $-y_i \geq 0$.

(ii) Par Hölder pour $p = q = 1/2$, on a

$$E(|Z|) = E(|Z| \times 1) \leq \sqrt{E(|Z|^2) E(1^2)} = \sqrt{E(Z^2)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

Par suite, avec la question précédente, on a

$$\sum_{i=1}^k y_i P(Z = y_i) \leq E(|Z|) \leq \sigma.$$

e. D'après (13c) et la question précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{i=1}^k P(Z = y_i) e^{-\tau y_i} \right) &= \ln \left(\delta \times \sum_{i=1}^k \delta^{-1} P(Z = y_i) e^{-\tau y_i} \right) \\ &= \ln(\delta) + \ln \left(\sum_{i=1}^k \delta^{-1} P(Z = y_i) e^{-\tau y_i} \right) \\ &\geq \ln(\delta) - \tau \delta^{-1} \sum_{i=1}^k P(Z = y_i) y_i \\ &\geq \ln(\delta) - \frac{\tau}{\delta} \sigma, \end{aligned}$$

ce qu'on demandait.

- f. En reprenant l'égalité de la Question (13a), et par croissance de la fonction exponentielle combinée avec l'inégalité précédente,

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq 0) &= \rho \sum_{i=1}^k P(Z = y_i) e^{-\tau y_i} \\
 &= \rho \exp \left(\ln \left(\sum_{i=1}^k P(Z = y_i) e^{-\tau y_i} \right) \right) \\
 &\geq \rho \exp \left(\ln(\delta) - \frac{\tau}{\delta} \sigma \right) = \rho \exp \left(- \left[\frac{\tau \sigma}{\delta} - \ln(\delta) \right] \right)
 \end{aligned}$$

- g. En appliquant le résultat de la Question (9h) à Z (ce qu'on peut faire d'après (12b) et (12c)), on a

$$\delta \geq \frac{\sigma^4}{4\xi^4}.$$

On injecte alors dans l'inégalité précédente en commençant par écrire que

$$\frac{\tau \sigma}{\delta} - \ln(\delta) \leq \frac{4\tau\xi^4}{\sigma^3} - \ln \left(\frac{\sigma^4}{4\xi^4} \right)$$

puis

$$P(Y \geq 0) \geq \rho \exp \left(- \left[\frac{4\tau\xi^4}{\sigma^3} - \ln \left(\frac{\sigma^4}{4\xi^4} \right) \right] \right)$$

14. On suppose maintenant qu'on a deux réels $c < 0 < d$ tels que $P(C \leq Y \leq d) = 1$.

- a. On pose $X = Y - E(Y)$.

- (i) On a clairement

$$\begin{aligned}
 [c \leq Y \leq d] &\iff [c - E(Y) \leq Y - E(Y) \leq d - E(Y)] \\
 &\iff [a \leq X \leq b]
 \end{aligned}$$

donc

$$P(a \leq X \leq b) = P(c \leq Y \leq d) = 1.$$

Comme $Y(\Omega) \subset [c, d]$, on sait que $E(Y) \in [c, d]$. Mais comme $E(Y) < 0$ et $d > 0$ alors $E(Y) \in [c, d[$. On doit aussi montrer que $E(Y) > c$. Supposons que $E(Y) = c$. Alors, $Y - c$ est une v.a. positive (ou nulle) d'espérance nulle donc presque sûrement nulle, c'est-à-dire que $P(Y - c = 0) = 1$ ou encore $P(Y = c) = 1$ ce qui contredit $P(Y > 0) > 0$. Ainsi, $E(Y) \in]c, d[$, ce qui se traduit bien par

$$a = c - E(Y) < 0 < d - E(Y) = b.$$

- (ii) D'après (6e) qu'on peut appliquer à X car X vérifie (d'après la question précédente) les conditions de (6a), on a, pour tout $t > 0$,

$$M_X(t) \leq \exp \left(\frac{1}{8} t^2 (b - a)^2 \right).$$

Mais, en observant que

$$b - a = d - E(Y) - (c - E(Y)) = d - c,$$

on a en fait, pour tout $t > 0$,

$$M_X(t) \leq \exp \left(\frac{1}{8} t^2 (d - c)^2 \right).$$

- b. On considère un n -échantillon (Y_1, \dots, Y_n) de Y et on pose $X_i = Y_i - E(Y)$. Soit $t > 0$. Remarquant que $Y_i = X_i + E(Y)$ et que donc

$$\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n X_i + nE(Y),$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_i \geq 0 &\iff t \sum_{i=1}^n Y_i \geq 0 \\ &\iff e^{t \sum_{i=1}^n Y_i} \geq 0 \geq 1 \\ &\iff e^{t \sum_{i=1}^n X_i} e^{tnE(Y)} \geq 1 \\ &\iff e^{t \sum_{i=1}^n X_i} \geq e^{-tnE(Y)} \end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \geq 0\right) = P\left(e^{t \sum_{i=1}^n X_i} \geq e^{-tnE(Y)}\right)$$

- c. On applique alors l'inégalité de Markov à $\exp(t(X_1 + \dots + X_n))$ qui est positive et admet bien une espérance, ce qui donne

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \geq 0\right) &= P\left(e^{t \sum_{i=1}^n X_i} \geq e^{-tnE(Y)}\right) \\ &\leq \frac{E(\exp(t(X_1 + \dots + X_n)))}{e^{-tnE(Y)}} \\ &= M_{X_1 + \dots + X_n}(t) e^{tnE(Y)}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

- d. D'après la Question (3), on a

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

Mais d'après la Question (14a) – (ii), on a

$$M_{X_i}(t) \leq \exp\left(\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right),$$

ce qui donne

$$M_{X_1 + \dots + X_n}(t) \leq \left(\exp\left(\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right)\right)^n = \exp\left(n\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right)$$

pour au final, aboutir à

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \geq 0\right) \leq e^{tnE(Y)} \exp\left(n\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right) = \exp\left(tnE(Y) + n\frac{1}{8}t^2(d-c)^2\right)$$

- e. L'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $t > 0$. On va choisir la valeur de t qui rend le majorant de droite minimal. Par croissance de l'exponentielle, il faut choisir la valeur de t qui rend la fonction

$$t \mapsto nE(Y)t + \frac{1}{8}n(d-c)^2t^2$$

minimale. C'est un polynôme du second degré. On passe sur les étapes, mais le minimum est atteint en

$$t_0 = -\frac{4E(Y)}{(d-c)^2} > 0 \quad (\text{car } E(Y) < 0)$$

En évaluant la fonction en t_0 , on trouve bien

$$nE(Y)t_0 + \frac{1}{8}n(d-c)^2t_0^2 = -2n\frac{E(Y)^2}{(d-c)^2}$$

ce qui donne bien

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \geq 0\right) \leq \exp\left(-2n\frac{E(Y)^2}{(d-c)^2}\right),$$

et conclut ce très technique mais superbe sujet.